

Università di Roma “Tor Vergata” – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 02/09/2024

Cognome: (in STAMPATELLO)
Nome: (in STAMPATELLO)
Matricola:
Titolare del corso:
Prova orale:

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Cognome (in STAMPATELLO): Nome (in STAMPATELLO):.....

Esercizio 1. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$x^2 + e^{|x^2-a|}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$[a = (2, 3, 4, 5)]$

Svolgimento: Il dominio di f è chiaramente $D = \mathbb{R}$, e f è pari, quindi basta studiarla per $x \geq 0$. Risulta anche evidentemente

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Poiché $D = \mathbb{R}$ ed f è chiaramente continua in D , il grafico di f non ha asintoti verticali. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

dove il secondo limite è conseguenza della gerarchia degli infiniti. Dunque il grafico di f non ha nemmeno asintoti orizzontali né obliqui.

Risulta poi

$$f'(x) = 2x(1 - e^{a-x^2}) \text{ per } 0 \leq x < \sqrt{a}, \quad f'(x) = 2x(1 + e^{x^2-a}) \text{ per } x > \sqrt{a}.$$

e

$$f'_-(\sqrt{a}) = \lim_{x \rightarrow (\sqrt{a})^-} f'(x) = 0, \quad f'_+(\sqrt{a}) = \lim_{x \rightarrow (\sqrt{a})^+} f'(x) = 4\sqrt{a}.$$

e quindi il grafico di f ha in $x = \pm\sqrt{a}$ due punti angolosi (con tangente orizzontale da un lato).

Infine è chiaro che $f'(x) \leq 0$, e pertanto f è decrescente, per $0 \leq x < \sqrt{a}$, mentre $f'(x) > 0$, e quindi f è crescente, per $x > \sqrt{a}$. Di conseguenza $x = 0$ è un punto di massimo relativo (ma non assoluto) e $x = \pm\sqrt{a}$ sono punti di minimo assoluto per f .

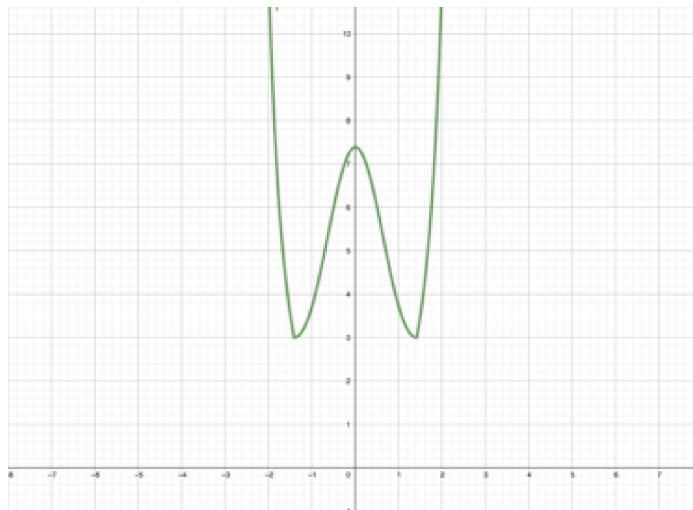


FIGURA 1. Grafico per $a = 2$

Cognome (in STAMPATELLO): Nome (in STAMPATELLO):.....

Esercizio 2. [7 punti] Calcolare il seguente integrale:

$$\int_a^{2a} \frac{\log x}{(3a - x)^{3/2}} dx.$$

$[a = 5, 4, 3, 2]$

Svolgimento: Integrando per parti:

$$\int \frac{\log x}{(3a - x)^{3/2}} dx = 2 \int \log x \left(\frac{1}{(3a - x)^{1/2}} \right)' dx = 2 \frac{\log x}{(3a - x)^{1/2}} - 2 \int \frac{1}{x(3a - x)^{1/2}} dx.$$

Calcoliamo l'ultimo integrale: con la sostituzione $t = (3a - x)^{1/2}$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(3a - x)^{1/2}} dx &= - \int \frac{2}{3a - t^2} dt = - \frac{1}{\sqrt{3a}} \int \left(\frac{1}{\sqrt{3a} - t} + \frac{1}{\sqrt{3a} + t} \right) dt \\ &= - \frac{1}{\sqrt{3a}} \log \left(\frac{\sqrt{3a} + t}{\sqrt{3a} - t} \right) + c. \end{aligned}$$

Pertanto si conclude:

$$\int \frac{\log x}{(3a - x)^{3/2}} dx = \frac{2 \log x}{(3a - x)^{1/2}} + \frac{2}{\sqrt{3a}} \log \left(\frac{\sqrt{3a} + (3a - x)^{1/2}}{\sqrt{3a} - (3a - x)^{1/2}} \right) + c$$

da cui segue

$$\int_a^{2a} \frac{\log x}{(3a - x)^{3/2}} dx = \frac{2 \log(2a)}{\sqrt{a}} + \frac{2}{\sqrt{3a}} \log \left(\frac{\sqrt{3a} + \sqrt{a}}{\sqrt{3a} - \sqrt{a}} \right) - \frac{2 \log a}{\sqrt{2a}} - \frac{2}{\sqrt{3a}} \log \left(\frac{\sqrt{3a} + \sqrt{2a}}{\sqrt{3a} - \sqrt{2a}} \right).$$

Esercizio 3. [5 punti] Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$z^2 + \operatorname{Im}(z^2 \pm 6z) = 5 \quad \left[z^2 + \operatorname{Im}(z^2 \pm 3z) = 2 \right].$$

Svolgimento: Risolviamo l'equazione: $z^2 + \operatorname{Im}(z^2 + 6z) = 5$. Posto $z = x + iy$, si ha:

$$\begin{aligned} z^2 + \operatorname{Im}(z^2 + 6z) = 5 &\iff x^2 - y^2 + 2ixy + \operatorname{Im}(x^2 - y^2 + 2ixy + 6x + 6iy) = 5 \iff x^2 - y^2 + 2ixy + 2xy + 6y = 5 \\ &\iff \begin{cases} x^2 - y^2 + 6y = 5 \\ xy = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -y^2 + 6y = 5 \\ x = 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x^2 = 5 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1, 5 \\ x = 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x = \sqrt{5}, -\sqrt{5} \\ y = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Pertanto le soluzioni dell'equazione sono

$$z = \sqrt{5}, \quad z = -\sqrt{5}, \quad z = i, \quad z = 5i.$$

Esercizio 4. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{an^2 + bn + c}{an^2} \right)^{n^2} \cdot \left(e^{-\frac{b}{a}n} + \frac{1}{n!} \right).$$

$$[(a, b, c) = (2, 3, 3), (3, 2, 2), (4, 5, 3), (5, 4, 3)]$$

Svolgimento: Avendosi

$$\left(\frac{an^2 + bn + c}{an^2} \right)^{n^2} = \exp \left(n^2 \log \left(\frac{an^2 + bn + c}{an^2} \right) \right) = \exp \left(n^2 \log \left(1 + \frac{b}{an} + \frac{c}{an^2} \right) \right)$$

ed essendo $e^{o(1)} = 1 + o(1)$, si vede che basta sviluppare il logaritmo a meno di termini $o(1/n^2)$ per $n \rightarrow \infty$. Dunque, in base allo sviluppo $\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \rightarrow 0$, si ha

$$\begin{aligned} \log \left(1 + \frac{b}{an} + \frac{c}{an^2} \right) &= \frac{b}{an} + \frac{c}{an^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{b}{an} + \frac{c}{an^2} \right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{b}{an} + \frac{c}{an^2} - \frac{b^2}{2a^2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \left(\frac{an^2 + bn + c}{an^2} \right)^{n^2} &= \exp \left(n^2 \left(\frac{b}{an} + \frac{c}{an^2} - \frac{b^2}{2a^2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right) \\ &= \exp \left(\frac{b}{a}n + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{2a^2} + o(1) \right) = e^{\frac{b}{a}n} e^{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{2a^2}} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

D'altra parte, in base alla gerarchia degli infiniti, $e^{\frac{b}{a}n}/n! = o(1)$ per $n \rightarrow \infty$, e dunque

$$e^{-\frac{b}{a}n} + \frac{1}{n!} = e^{-\frac{b}{a}n} (1 + o(1)).$$

Si conclude che il limite richiesto vale

$$e^{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{2a^2}}.$$

Esercizio 5. [6 punti] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^a \frac{\log^2 a - \log^2 x}{(\sqrt{a} - \sqrt{x})^\alpha} dx.$$

$$[a = 5, 4, 3, 2]$$

Svolgimento: Risulta chiaramente:

$$f(x) \sim -\frac{\log^2 x}{a^{\frac{\alpha}{2}}} = -\frac{1}{a^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{x^0 \log^{-2} x} \text{ per } x \rightarrow 0^+.$$

e ricordando che la funzione $g(x) = \frac{1}{x^\beta \log^\gamma x}$ è integrabile per $x \rightarrow 0^+$ per ogni $\beta < 1$, $\gamma \in \mathbb{R}$, si vede che f è integrabile per $x \rightarrow 0^+$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

D'altra parte, posto $y = a - x$,

$$f(x) = \frac{\log^2 a - \log^2(a - y)}{(\sqrt{a} - \sqrt{a - y})^\alpha}.$$

Per $y \rightarrow 0^+$ risulta allora

$$\log^2(a - y) = \left(\log a + \log \left(1 - \frac{y}{a} \right) \right)^2 = \left(\log a - \frac{y}{a} + o(y) \right)^2 = \log^2 a - 2 \frac{\log a}{a} y + o(y)$$

$$\sqrt{a - y} = \sqrt{a} \sqrt{1 - \frac{y}{a}} = \sqrt{a} \left(1 - \frac{y}{2a} + o(y) \right) = \sqrt{a} - \frac{1}{2\sqrt{a}} y + o(y).$$

Pertanto

$$\frac{\log^2 a - \log^2(a - y)}{(\sqrt{a} - \sqrt{a - y})^\alpha} = \frac{2 \frac{\log a}{a} y + o(y)}{\left(\frac{1}{2\sqrt{a}} y + o(y) \right)^\alpha} = \frac{2 \frac{\log a}{a} y (1 + o(1))}{\left(\frac{1}{2\sqrt{a}} y \right)^\alpha (1 + o(1))^\alpha} \sim 2^{\alpha+1} a^{\frac{\alpha}{2}-1} \log a y^{1-\alpha} \text{ per } y \rightarrow 0^+.$$

Si deduce che

$$f(x) \sim 2^{\alpha+1} a^{\frac{\alpha}{2}-1} \log a \frac{1}{(a - x)^{\alpha-1}} \text{ per } x \rightarrow a^-.$$

Pertanto f è integrabile per $x \rightarrow a^-$ se e solo se $\alpha - 1 < 1$, cioè $\alpha < 2$. Segue che f è integrabile in $(0, a)$ se e solo se $\alpha < 2$.