

ANALISI MATEMATICA 2 - INGEGNERIA MECCANICA ED ENERGETICA

A.A. 2020-21

NOTE SUGLI ESTREMALI VINCOLATI

G. MORSELLA

Definizione 1. Siano $D \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m < n$, funzioni, e sia $\Gamma := \{x \in D \mid g(x) = 0\}$ il luogo degli zeri di g . Un punto $x_0 \in \Gamma$ è detto un *punto di minimo (risp. massimo) locale per f vincolato a Γ* se esiste un intorno U di x_0 tale che

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ (risp. } f(x) \leq f(x_0)), \quad \text{per ogni } x \in U \cap \Gamma.$$

Un punto *estremale per f vincolato a Γ* è un punto di minimo o di massimo vincolato.

È chiaro che un punto di minimo (risp. massimo) libero (cioè non vincolato) di f è anche un punto di minimo (risp. massimo) vincolato, mentre il viceversa non è vero, come mostra l'esempio seguente.

Esempio 2. Siano $f(x, y) = x^2 - y^2$, $g(x, y) = x$, $h(x, y) = y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Come sappiamo $(0, 0)$ è un punto di sella per f e dunque non è né massimo né minimo. Essendo però $f(x, 0) = x^2 \geq 0 = f(0, 0)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $(0, 0)$ è un punto di minimo per f vincolato a $\Gamma_h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid h(x, y) = 0\}$, ed essendo $f(0, y) = -y^2 \leq 0 = f(0, 0)$, $(0, 0)$ è un punto di massimo per f vincolato a $\Gamma_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$.

Il seguente teorema fornisce un'utile condizione necessaria per l'estremalità vincolata di un punto, analoga alla stazionarietà per gli estremali liberi (fornita dal teorema di Fermat). Prima di enunciarlo, ricordiamo che data $g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($m < n$) di classe C^1 in D , un punto $x_0 \in \Gamma := \{x \in D \mid g(x) = 0\}$ si dice un punto regolare di (o per) Γ se $\text{rg } J_g(x_0) = m$, cioè se gli m vettori $\nabla g_1(x_0), \dots, \nabla g_m(x_0)$ (righe di $J_g(x_0)$) sono linearmente indipendenti.

Teorema 3 (dei moltiplicatori di Lagrange). *Siano $D \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m < n$, funzioni di classe C^1 in D , e $\Gamma := \{x \in D \mid g(x) = 0\}$. Se $x_0 \in \Gamma$ è regolare per Γ ed estremale per f vincolato a Γ , esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\nabla f(x_0) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla g_j(x_0). \quad (1)$$

Scrivendo esplicitamente le componenti dell'equazione vettoriale (1), si vede che se $x_0 \in \mathbb{R}^n$ è (regolare per Γ e) estremale per f vincolato a Γ , allora esiste $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tale che $(x_0, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+m}$ sia soluzione del sistema di $n + m$ equazioni nelle $n + m$ incognite $(x, \lambda) = (x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_1}(x) = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_n}(x) = 0, \\ g_1(x) = 0, \\ \vdots \\ g_m(x) = 0. \end{cases}$$

A sua volta, è evidente che il fatto che $(x_0, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+m}$ sia soluzione del sistema precedente equivale a dire che è un punto stazionario libero della *funzione lagrangiana* $L : D \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$L(x, \lambda) := f(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x),$$

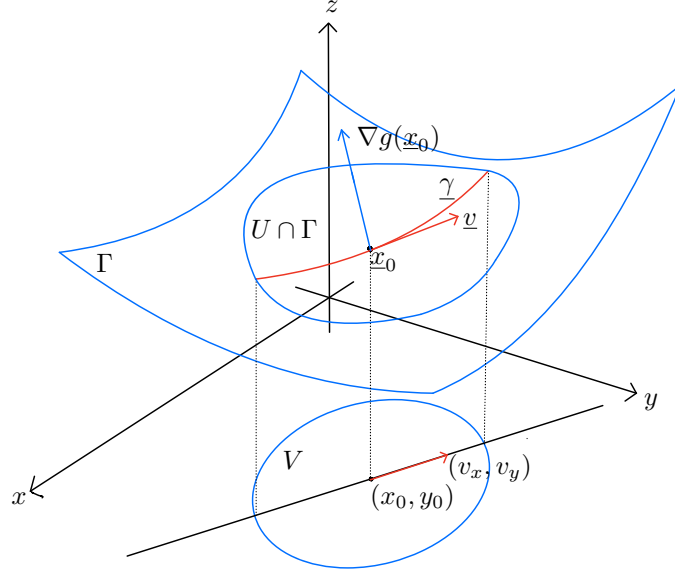


FIGURA 1

infatti $\frac{\partial L}{\partial x_k}(x, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_k}(x)$ e $\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(x, \lambda) = g_j(x)$. In particolare, un punto estremale libero di f , che, come osservato sopra, è anche un punto estremale vincolato, sarà una soluzione di (1) con $\lambda = 0$.

Si vede dunque che il teorema dei moltiplicatori di Lagrange permette di trasformare il problema della ricerca di un punto estremale di una funzione di n variabili soggetta a m vincoli in quello della ricerca di un punto stazionario di una funzione di $n + m$ variabili (la lagrangiana) non soggetta a vincoli.

Dimostrazione del teorema dei moltiplicatori. Per semplicità, la facciamo soltanto nel caso di una funzione f di $n = 3$ variabili soggetta a $m = 1$ vincoli (cioè vincolata a Γ luogo degli zeri di una funzione scalare $g : D \rightarrow \mathbb{R}$). Il caso generale si può trattare con metodi analoghi a quelli che useremo ora. Inoltre, per fissare le idee, supponiamo che $\underline{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$ sia un minimo vincolato per f (il caso di un massimo si riduce a questo sostituendo $-f$ a f). Poiché $\underline{x}_0$ è anche un punto regolare per Γ , si avrà $\nabla g(\underline{x}_0) \neq 0$, e, sempre per fissare le idee, supporremo allora che $g_z(\underline{x}_0) \neq 0$. Se allora $\underline{v} = (v_x, v_y, v_z) \in \mathbb{R}^3$ è tale che

$$\langle \nabla g(\underline{x}_0), \underline{v} \rangle = g_x(\underline{x}_0)v_x + g_y(\underline{x}_0)v_y + g_z(\underline{x}_0)v_z = 0, \quad (2)$$

mostriamo che esiste una curva $\underline{\gamma} : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^3$ (con $\delta > 0$ scelto opportunamente) con sostegno contenuto in Γ e tale che $\underline{\gamma}(0) = \underline{x}_0$ e $\underline{\gamma}'(0) = \underline{v}$. A tale scopo, osserviamo che poiché $g_z(\underline{x}_0) \neq 0$, il teorema di Dini ci assicura dell'esistenza di un intorno $V \subset \mathbb{R}^2$ di (x_0, y_0) , di un intorno $U \subset \mathbb{R}^3$ di $\underline{x}_0$ e di una funzione $h : V \rightarrow \mathbb{R}$, $h \in C^1(V)$, tali che $h(x_0, y_0) = z_0$ e che $U \cap \Gamma$ sia il grafico di h :

$$U \cap \Gamma = \{(x, y, h(x, y)) \mid (x, y) \in V\}.$$

Inoltre, essendo $\underline{x}_0$ un minimo vincolato, restringendo U e V se occorre si può supporre che $f(\underline{x}) \geq f(\underline{x}_0)$ per ogni $\underline{x} \in U \cap \Gamma$, come nella definizione 1. Esisterà allora $\delta > 0$ tale che $(x_0 + tv_x, y_0 + tv_y) \in V$ se $|t| < \delta$, e si definisca

$$\underline{\gamma}(t) := (x_0 + tv_x, y_0 + tv_y, h(x_0 + tv_x, y_0 + tv_y)), \quad |t| < \delta.$$

Geometricamente, $\underline{\gamma}$ è la curva il cui sostegno è il grafico della restrizione di h alla retta per (x_0, y_0) con vettore direttore (v_x, v_y) , come illustrato nella figura 1. Si avrà allora $\underline{\gamma}(t) \in U \cap \Gamma$ per ogni $t \in (-\delta, \delta)$, $\underline{\gamma}(0) = (x_0, y_0, h(x_0, y_0)) = \underline{x}_0$, e

$$\underline{\gamma}'(0) = (v_x, v_y, h_x(x_0, y_0)v_x + h_y(x_0, y_0)v_y) = \left(v_x, v_y, -\frac{g_x(\underline{x}_0)}{g_z(\underline{x}_0)}v_x - \frac{g_y(\underline{x}_0)}{g_z(\underline{x}_0)}v_y \right) = \underline{v},$$

dove la prima uguaglianza è conseguenza della regola della catena, la seconda della formula per le derivate parziali della funzione h fornita dal teorema di Dini, e la terza del fatto che, in base alla (2),

$$v_z = -\frac{g_x(\underline{x}_0)}{g_z(\underline{x}_0)}v_x - \frac{g_y(\underline{x}_0)}{g_z(\underline{x}_0)}v_y.$$

D'altra parte, poiché $\underline{\gamma}(t) \in U \cap \Gamma$ per ogni $t \in (-\delta, \delta)$, la funzione di una variabile $\varphi(t) := f(\underline{\gamma}(t))$, $t \in (-\delta, \delta)$, è tale che

$$\varphi(t) = f(\underline{\gamma}(t)) \geq f(\underline{x}_0) = f(\underline{\gamma}(0)) = \varphi(0).$$

Dunque $t = 0$ è un punto di minimo per φ , e dal teorema di Fermat in una variabile, insieme con la regola della catena, segue

$$0 = \varphi'(0) = \langle \nabla f(\underline{\gamma}(0)), \underline{\gamma}'(0) \rangle = \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v} \rangle.$$

Se ne conclude che $\nabla f(\underline{x}_0)$ è ortogonale a tutti i vettori $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ che soddisfano la (2), cioè che sono ortogonali a $\nabla g(\underline{x}_0)$. Di conseguenza, $\nabla f(\underline{x}_0)$ è parallelo a $\nabla g(\underline{x}_0)$: $\nabla f(\underline{x}_0) = \lambda \nabla g(\underline{x}_0)$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

Notiamo esplicitamente che la condizione fornita dal teorema dei moltiplicatori non è in generale sufficiente a garantire che $x_0 \in \Gamma$ sia un punto estremaie vincolato, in quanto può accadere che $f(x) - f(x_0)$ assuma valori di entrambi i segni in $U \cap \Gamma$ per ogni intorno U di x_0 , analogamente ai punti di sella (non vincolati). Ci si convince facilmente del fatto che una condizione sufficiente affinché $x_0 \in \Gamma$ sia un minimo (risp. massimo) vincolato per f , è che il punto $(x_0, \lambda) \in \Gamma \times \mathbb{R}^m$ soluzione di (1) sia un minimo (risp. massimo) libero per la lagrangiana L : in tal caso infatti, se $x \in \Gamma$ è in un opportuno intorno di x_0 , allora $f(x) = L(x, \lambda) \geq L(x_0, \lambda) = f(x_0)$ (poiché $g(x) = 0 = g(x_0)$ per $x, x_0 \in \Gamma$). Tale condizione non è tuttavia necessaria: è facile fare esempi di punti estremali vincolati x_0 tali che il corrispondente punto (x_0, λ) sia di sella per L (e anzi si può dimostrare che questo accade sempre se x_0 è un punto estremaie libero).