

ANALISI MATEMATICA 2 - INGEGNERIA MECCANICA ED ENERGETICA
A.A. 2020-21
NOTE SUGLI INTEGRALI IMPROPRI

G. MORSELLA

Il nostro scopo in queste note è estendere la teoria dell'integrazione multipla al caso in cui sia la funzione integranda che l'insieme di integrazione possano essere non limitati. Ricordiamo che nel caso di funzioni di una variabile, questo si può fare usando un'opportuna procedura di limite. Ad esempio, per una $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua, l'integrale di f sull'intervallo illimitato $[a, +\infty)$ si definisce come il limite, per $r \rightarrow +\infty$, degli integrali sugli intervalli limitati $[a, r]$, se tale limite esiste. Analogamente, se $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua ma non limitata per $x \rightarrow a^+$, il suo integrale su $(a, b]$ si definisce come il limite, per $\varepsilon \rightarrow 0^+$, degli integrali su $[a + \varepsilon, b]$, dove f è limitata. Nel caso di funzioni di più variabili ci si aspetta di poter utilizzare la stessa idea, ma, come vedremo, la cosa è complicata dal fatto che ci sono infiniti modi, a priori non equivalenti, di approssimare un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$, possibilmente non limitato, con insiemi limitati sui quali la funzione da integrare sia limitata.

Il primo passo è quello di estendere le nozioni di misurabilità e di misura agli insiemi non limitati, il che si ottiene tramite la definizione seguente.

Definizione 1 (insiemi non limitati misurabili). Un insieme illimitato $E \subset \mathbb{R}^n$ si dice *misurabile* se l'insieme limitato $B_N(0) \cap E$ è misurabile per ogni $N \in \mathbb{N}$. In tal caso, la *misura* di E è definita da

$$|E| := \lim_{N \rightarrow +\infty} |B_N(0) \cap E|. \quad (1)$$

Osserviamo che il limite precedente esiste sempre, in quanto per ogni $N \in \mathbb{N}$ si ha $B_N(0) \cap E \subset B_{N+1}(0) \cap E$, e dunque la successione $\{|B_N(0) \cap E|\}_{N \in \mathbb{N}} \subset [0, +\infty)$ è monotona crescente, e come tale ammette limite, pari al suo estremo superiore. Dunque la misura di un insieme illimitato (misurabile) è un numero $|E| \in [0, +\infty]$. Inoltre se $E \subset \mathbb{R}^n$ è limitato e misurabile, allora $E = B_N(0) \cap E$ e $|E| = |B_N(0) \cap E|$ definitivamente (cioè per $N \in \mathbb{N}$ sufficiente grande), e pertanto la (1) vale anche per insiemi misurabili limitati, per i quali non è però una definizione, bensì un'identità. Dunque le nozioni di misurabilità e misura fornite dalla definizione precedente, se applicate a insiemi limitati riproducono quelle già note, e quindi nel seguito, quando parleremo di insiemi misurabili e della loro misura, non sarà necessario specificare se si tratti di insiemi limitati o meno.

La proposizione seguente fornisce un altro modo per calcolare la misura di un insieme misurabile.

Proposizione 2. Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile (non necessariamente limitato), e sia

$$\mathfrak{M}_E := \{F \subset E \mid F \text{ è misurabile e limitato}\}$$

la famiglia dei sottoinsiemi di E che sono misurabili e limitati. Allora

$$|E| = \sup_{F \in \mathfrak{M}_E} |F|.$$

Dimostrazione. Se $F \in \mathfrak{M}_E$, essendo F limitato esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $F \subset B_N(0)$, e dunque $F \subset B_N(0) \cap E$, da cui

$$|F| \leq |B_N(0) \cap E| \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} |B_N(0) \cap E| = |E|,$$

dove nella seconda disuguaglianza si è usato il fatto, osservato sopra, che la successione numerica $\{|B_N(0) \cap E|\}$ è crescente. Poiché la disuguaglianza precedente vale per ogni $F \in \mathfrak{M}_E$, si deduce $\sup_{F \in \mathfrak{M}_E} |F| \leq |E|$. Per dimostrare la disuguaglianza opposta, sia $x < |E|$. Allora, per definizione di limite, esisterà $N \in \mathbb{N}$ tale che $|B_N(0) \cap E| > x$. Ma chiaramente $B_N(0) \cap E$ è un sottoinsieme di E misurabile e limitato, cioè $B_N(0) \cap E \in \mathfrak{M}_E$. Pertanto $\sup_{F \in \mathfrak{M}_E} |F| \geq |B_N(0) \cap E| > x$ e facendo tendere x a $|E|$ si ottiene $\sup_{F \in \mathfrak{M}_E} |F| \geq |E|$. $\square$

Passiamo ora a definire l'integrale di una funzione non necessariamente limitata su un insieme misurabile, cominciando dal caso di funzioni non negative. A tale scopo ricordiamo che una funzione f è *generalmente continua* in un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ se esiste un sottoinsieme $N \subset E$ di misura nulla tale che f sia continua su $E \setminus N$. Definiamo allora la famiglia

$$\mathfrak{M}_f := \{F \in \mathfrak{M}_E \mid f \text{ è continua e limitata su } F\}$$

dei sottoinsiemi limitati e misurabili di E sui quali f è continua e limitata. Inoltre stabiliamo di usare la notazione abbreviata $\int_E f$ per l'integrale multiplo di f esteso all'insieme E (quando tale integrale è ben definito).

Definizione 3 (integrale improprio di una funzione non negativa). Siano $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile (non necessariamente limitato), e $f : E \rightarrow [0, +\infty)$ (non necessariamente limitata e) generalmente continua in E . L'integrale (improprio) su E di f è definito allora da

$$\int_E f := \sup_{F \in \mathfrak{M}_f} \int_F f. \quad (2)$$

Osserviamo che la definizione precedente è sensata, in quanto se f è continua e limitata sull'insieme limitato e misurabile $F \in \mathfrak{M}_f$, l'integrale $\int_F f$ è ben definito, e ha dunque senso considerare l'estremo superiore di tali integrali, che è naturale identificare con l'integrale di f su tutto E , poiché f è non negativa. Inoltre se E è limitato e misurabile e $f : E \rightarrow [0, +\infty)$ è continua e limitata, chiaramente $E \in \mathfrak{M}_f$ e per ogni $F \in \mathfrak{M}_f$ si ha $\int_F f \leq \int_E f$, e pertanto di nuovo la (2) vale come identità (e non come definizione), e la definizione precedente, se applicata all'integrale di una funzione continua e limitata su un insieme limitato e misurabile si riduce a quella già nota.

Un utile criterio per stabilire se l'integrale di una funzione non negativa è finito, che generalizza quello analogo valido per gli integrali impropri in una variabile, è fornito dal teorema seguente.

Teorema 4 (criterio del confronto). Siano $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile, e $f, g : E \rightarrow [0, +\infty)$ generalmente continue e tali che $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in E$. Allora

$$\int_E f \leq \int_E g.$$

Dimostrazione. Siano $F \in \mathfrak{M}_f$ e $N_g \subset E$ di misura nulla tale che g sia continua in $E \setminus N_g$. Posto allora $N := N_g \cap F$, anche N avrà misura nulla e g sarà continua su $F \setminus N$. Pertanto

$$\int_F f = \int_N f + \int_{F \setminus N} f = \int_{F \setminus N} f,$$

dove la prima uguaglianza è dovuta al fatto che F è l'unione disgiunta di $N \subset F$ e di $F \setminus N$, la seconda al fatto che $|N| = 0$, da cui $\int_N f = 0$. Inoltre poiché, essendo F misurabile, anche ∂F ha misura nulla, e poiché f è limitata su F , dato $\varepsilon > 0$ si può trovare un insieme aperto U_ε tale che

$$\partial F \cup N \subset U_\varepsilon, \quad |U_\varepsilon| < \frac{\varepsilon}{\sup_F f},$$

come illustrato in figura 1. Infatti, dal fatto che $\partial F \cup N$ ha misura nulla, segue l'esistenza di un numero finito di parallelepipedi la cui unione contiene $\partial F \cup N$ e la cui somma delle misure è inferiore a $2\varepsilon / \sup_F f$. Basta allora definire U_ε come l'unione degli interni di questi parallelepipedi, se necessario allargandoli un po'. Si avrà allora

$$\int_F f = \int_{F \setminus N} f = \int_{F \cap U_\varepsilon^c} f + \int_{(F \setminus N) \cap U_\varepsilon} f,$$

dove la seconda uguaglianza è conseguenza del fatto che $F \setminus N$ è l'unione disgiunta di $(F \setminus N) \cap U_\varepsilon^c = F \cap U_\varepsilon^c$ (in quanto $N \subset U_\varepsilon$) e di $(F \setminus N) \cap U_\varepsilon$. Inoltre poiché $\partial F \subset U_\varepsilon$, si ha che $F \cap U_\varepsilon^c = (F \cup \partial F) \cap U_\varepsilon^c = \bar{F} \cap U_\varepsilon^c$ è un insieme chiuso contenuto in F che è limitato, ed è quindi compatto. Dunque per il teorema di Weierstrass g , che è continua su $F \setminus N$, è limitata sul compatto $F \cap U_\varepsilon^c \subset F \setminus N$, che è anche un sottoinsieme limitato e misurabile di E , e dunque appartiene a $\mathfrak{M}_g$. Usando anche l'ipotesi $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in E$, ne segue che

$$\int_{F \cap U_\varepsilon^c} f \leq \int_{F \cap U_\varepsilon^c} g \leq \sup_{G \in \mathfrak{M}_g} \int_G g = \int_E g.$$

D'altra parte

$$\int_{(F \setminus N) \cap U_\varepsilon} f \leq \left(\sup_F f \right) |(F \setminus N) \cap U_\varepsilon| \leq \left(\sup_F f \right) |U_\varepsilon| < \varepsilon.$$

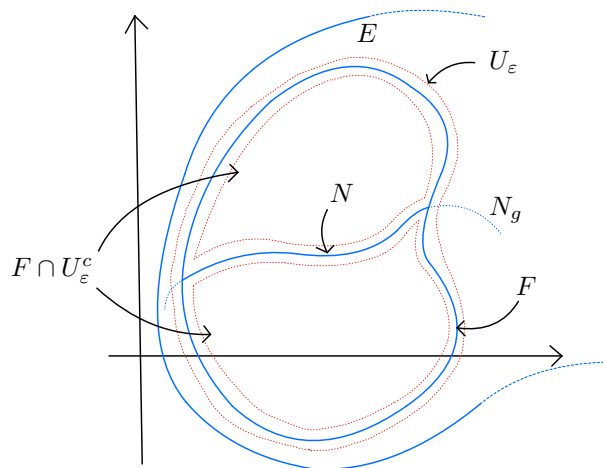


FIGURA 1

Dalle disuguaglianze precedenti otteniamo dunque, per ogni $F \in \mathfrak{M}_f$ e ogni $\varepsilon > 0$,

$$\int_F f \leq \int_E g + \varepsilon,$$

da cui, prendendo l'estremo superiore del membro di sinistra,

$$\int_E f = \sup_{F \in \mathfrak{M}_f} \int_F f \leq \int_E g + \varepsilon,$$

e si ottiene la tesi grazie all'arbitrarietà di ε . $\square$

Vogliamo ora estendere la nozione di integrale improprio a funzioni di segno variabile. Sia allora $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, e si definiscano

$$f_{\pm}(x) := \frac{1}{2}(|f(x)| \pm f(x)), \quad x \in E,$$

le parti positiva e negativa di f . In altri termini

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0, \\ 0 & \text{se } f(x) < 0, \end{cases} \quad f_-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{se } f(x) \leq 0, \\ 0 & \text{se } f(x) > 0. \end{cases}$$

Pertanto $0 \leq f_{\pm}(x) \leq |f(x)|$. Se inoltre f è generalmente continua in E , tali saranno evidentemente anche $f_{\pm}, |f|$. Poiché inoltre tali funzioni sono non negative, avrà senso considerare, in base alla definizione 3, gli integrali impropri $\int_E f_{\pm}, \int_E |f|$, e se quest'ultimo integrale risulta finito, tali saranno, per il criterio del confronto, anche gli integrali $\int_E f_{\pm}$. Il fatto che inoltre chiaramente $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$, $x \in E$, motiva la definizione seguente.

Definizione 5 (integrale improprio di una funzione di segno variabile). Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile. La funzione $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ generalmente continua in E si dice *sommabile* (o *assolutamente impropriamente integrabile*) in E se

$$\int_E |f| < +\infty.$$

In tal caso, l'integrale (improprio) di f esteso a E è definito da

$$\int_E f := \int_E f_+ - \int_E f_-.$$

Se inoltre f non è sommabile, ma riesce $\int_E f_- < +\infty$ (risp. $\int_E f_+ < +\infty$), si pone

$$\int_E f := +\infty \quad (\text{risp. } \int_E f := -\infty).$$

Se invece $\int_E f_+ = \int_E f_- = +\infty$, non si dà significato al simbolo $\int_E f$.

Per il calcolo esplicito di un integrale improprio usare la definizione in generale non è pratico, e conviene ricorrere invece al teorema seguente.

Teorema 6. Siano $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ generalmente continua non negativa o sommabile, e $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}_f$ una successione tale che

- (i) $F_k \subset F_{k+1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$;
- (ii) per ogni $F \in \mathfrak{M}_f$, si ha $F \subset F_k$ definitivamente per $k \rightarrow +\infty$.

Allora

$$\int_E f = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{F_k} f. \quad (3)$$

Dimostrazione. In base alla definizione 5, basta considerare il caso in cui f è non negativa. Sia allora $\{F_k\} \subset \mathfrak{M}_f$ soddisfacente alle (i) e (ii) dell'enunciato. Allora chiaramente per la (i) la successione numerica $\{\int_{F_k} f\}_{k \in \mathbb{N}} \subset [0, +\infty)$ è monotona crescente, e ammette quindi limite per $k \rightarrow +\infty$. Essendo poi $F_k \in \mathfrak{M}_f$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, si avrà

$$\int_{F_k} f \leq \sup_{F \in \mathfrak{M}_f} \int_F f = \int_E f, \quad k \in \mathbb{N},$$

da cui $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{F_k} f \leq \int_E f$. Viceversa, se $F \in \mathfrak{M}_f$ per la (ii) si avrà $F \subset F_k$ definitivamente per $k \rightarrow +\infty$, da cui

$$\int_F f \leq \int_{F_k} f \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{F_k} f,$$

e pertanto, prendendo l'estremo superiore su $F \in \mathfrak{M}_f$,

$$\int_E f = \sup_{F \in \mathfrak{M}_f} \int_F f \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{F_k} f$$

e si ottiene quindi la tesi. $\square$

Notiamo esplicitamente che gli integrali $\int_{F_k} f$ che compaiono nel membro di destra della (3) non sono impropri, poiché gli F_k sono insiemi limitati e misurabili sui quali la f è continua e limitata. Inoltre la successione $\{F_k\}$ è ristretta solo dalle condizioni (i) e (ii), ed è per il resto del tutto arbitraria. Dunque il valore del limite è lo stesso qualunque sia la successione $\{F_k\}$ soddisfacente tali condizioni, e si può scegliere la successione che renda il calcolo più semplice. È anche chiaro dalla dimostrazione che il teorema continua a valere se si suppone solo che uno tra $\int_E f_+$ e $\int_E f_-$ sia finito. È invece facile fare esempi di funzioni (di segno non costante) tali che questi integrali sono entrambi infiniti e tali che si possono trovare due diverse successioni, entrambi soddisfacenti (i) e (ii), per le quali il limite (3) assuma valori diversi. Se ne conclude che l'esistenza del limite (3), da sola, non è sufficiente a garantire la sommabilità di una funzione di segno variabile o più in generale che abbia senso considerare il suo integrale improprio (mentre per una funzione di segno definito l'integrale improprio è sempre ben definito, come visto, e il limite (3) ne fornisce sempre il valore).

Riassumendo, la strategia per il calcolo dell'integrale improprio di una funzione f generalmente continua possibilmente non limitata, esteso ad un insieme E misurabile possibilmente non limitato è la seguente. Si verifica dapprima se la funzione f ha segno costante. In caso positivo, per calcolare $\int_E f$ basta calcolare il limite (3) per una qualunque successione $\{F_k\} \subset \mathfrak{M}_f$ soddisfacente le condizioni (i) e (ii) del teorema 6. Se invece f ha segno variabile, si calcola dapprima $\int_E |f|$ usando ancora il limite (3) (il che è sensato perché $|f|$ è non negativa). Se $\int_E |f| < +\infty$, f è sommabile e dunque anche $\int_E f$ si può calcolare tramite la (3) (eventualmente usando una successione $\{F_k\}$ diversa da quella usata per il calcolo di $\int_E |f|$). Se invece $\int_E |f| = +\infty$, si possono calcolare, ancora usando la (3), gli integrali $\int_E f_{\pm}$. Se riesce $\int_E f_+ = +\infty$, $\int_E f_- < +\infty$ si avrà $\int_E f = +\infty$, e $\int_E f = -\infty$ nel caso contrario. Se infine $\int_E f_+ = \int_E f_- = +\infty$, l'integrale di f su E non è definito.

Concludiamo allora con alcuni esempi di calcolo di integrali impropri.

Esempi 7. (a) Sia $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Poiché $B_N(0, 0) \cap \mathbb{R}^2 = B_N(0, 0)$ è ovviamente misurabile per ogni $N \in \mathbb{N}$, tale è per la definizione 1 l'insieme illimitato $E = \mathbb{R}^2$. Inoltre la funzione f è chiaramente continua su $\mathbb{R}^2$ e soddisfa $0 \leq f(x, y) \leq 1$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dunque in particolare è limitata e non negativa. Ne segue che per il calcolo dell'integrale improprio $\int_{\mathbb{R}^2} f$ si può usare il limite (3), e che, grazie alla continuità e limitatezza di f , $\mathfrak{M}_f$ è la famiglia di tutti i sottoinsiemi limitati misurabili di $\mathbb{R}^2$. È allora chiaro che la successione $\{B_k(0, 0)\}_{k \in \mathbb{N}}$ delle palle aperte di centro l'origine e raggio $k \in \mathbb{N}$

appartiene a $\mathfrak{M}_f$ e soddisfa le condizioni (i) e (ii) del teorema 6. Ne viene

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \iint_{B_k(0,0)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^k dr r e^{-r^2} \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \pi \int_0^{k^2} dt e^{-t} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \pi [1 - e^{-k^2}] = \pi, \end{aligned}$$

dove per la seconda uguaglianza si è passati a coordinate polari, e per la terza si è usato il cambiamento di variabile $t = r^2$. È interessante osservare che posto $Q_k := [-k, k] \times [-k, k]$ (quadrato di lato $2k$ centrato nell'origine), anche la successione $\{Q_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}_f$ soddisfa (i) e (ii), e pertanto, come notato sopra, il limite degli integrali $\int_{Q_k} f$ coinciderà con il valore di $\int_{\mathbb{R}^2} f$:

$$\begin{aligned} \pi &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{k \rightarrow +\infty} \iint_{Q_k} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-k}^k dx e^{-x^2} \int_{-k}^k dy e^{-y^2} \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[\int_{-k}^k dx e^{-x^2} \right]^2 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} \right]^2, \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che la funzione di una variabile $g(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, è evidentemente impropriamente integrabile in $\mathbb{R}$ (è continua, limitata, e tende a zero per $|x| \rightarrow +\infty$ più velocemente di $|x|^{-2}$). Abbiamo ottenuto dunque la formula per il valore dell'integrale della gaussiana su tutto $\mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

che è notevole, a causa del fatto che la primitiva di g non è esprimibile tramite funzioni elementari.

(b) Dato $\alpha > 0$, si consideri la funzione $f(\underline{x}) = \frac{1}{\|\underline{x}\|^\alpha}$, $\underline{x} \in B_1(\underline{0}) \setminus \{\underline{0}\} \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$), e sia f definita in modo arbitrario per $\underline{x} = \underline{0}$. La funzione f è ovviamente non negativa in $E := B_1(\underline{0})$ (palla di centro l'origine e raggio 1 in $\mathbb{R}^n$), che è misurabile e limitato, e f è continua in $E \setminus \{\underline{0}\}$, e quindi generalmente continua in E , ma non è limitata in E , poichè chiaramente diverge a $+\infty$ per $\underline{x} \rightarrow \underline{0}$. Questo implica che $F \in \mathfrak{M}_f$ se e solo se F è un sottoinsieme misurabile di E per il quale esista $\varepsilon > 0$ tale che $\|\underline{x}\| > \varepsilon$ per ogni $\underline{x} \in F$ (in caso contrario, f non sarebbe limitata su F). Pertanto posto

$$F_k := E \setminus B_{\frac{1}{k}}(\underline{0}) = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \frac{1}{k} \leq \|\underline{x}\| < 1 \right\},$$

la successione $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}_f$ soddisfa le condizioni (i) e (ii) del teorema 6, è infatti chiaro che da $\frac{1}{k} > \frac{1}{k+1}$ segue $F_k \subset F_{k+1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, e dato $F \in \mathfrak{M}_f$ e il corrispondente $\varepsilon > 0$, basta che sia $k > \frac{1}{\varepsilon}$ affinché $F \subset F_k$. Dunque grazie alla (3), se $n = 2$

$$\iint_{B_1(\underline{0})} \frac{dx dy}{\|(x, y)\|^\alpha} = \iint_{B_1(\underline{0})} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \iint_{F_k} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}}}$$

e, passando a coordinate polari,

$$\iint_{F_k} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{1}{k}}^1 \frac{dr}{r^{\alpha-1}} = 2\pi \begin{cases} \log k & \text{se } \alpha = 2, \\ \frac{1}{2-\alpha} \left(1 - \frac{1}{k^{2-\alpha}}\right) & \text{se } \alpha \neq 2, \end{cases}$$

e pertanto per $n = 2$

$$\iint_{B_1(\underline{0})} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \geq 2, \\ \frac{2\pi}{2-\alpha} & \text{se } \alpha < 2. \end{cases}$$

Analogamente, per $n = 3$, usando coordinate sferiche,

$$\iiint_{F_k} \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\alpha/2}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_{\frac{1}{k}}^1 \frac{dr}{r^{2-\alpha}} = 4\pi \begin{cases} \log k & \text{se } \alpha = 3, \\ \frac{1}{3-\alpha} \left(1 - \frac{1}{k^{3-\alpha}}\right) & \text{se } \alpha \neq 3, \end{cases}$$

e quindi

$$\iiint_{B_1(\underline{0})} \frac{dx dy dz}{\|(x, y, z)\|^\alpha} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \iiint_{F_k} \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\alpha/2}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \geq 3, \\ \frac{4\pi}{3-\alpha} & \text{se } \alpha < 3. \end{cases}$$

In particolare, quindi, la funzione $f(\underline{x}) = \frac{1}{\|\underline{x}\|^\alpha}$ è sommabile in $B_1(\underline{0}) \subset \mathbb{R}^n$ se e solo se $\alpha < n$, e si vede facilmente che lo stesso vale per quanto riguarda la sommabilità della funzione $f(\underline{x}) = \frac{1}{\|\underline{x} - \underline{x}_0\|^\alpha}$ nella palla $B_r(\underline{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$ di centro $\underline{x}_0$ e raggio $r > 0$.

(c) Dato $\alpha > 0$, si consideri la stessa funzione $f(\underline{x}) = \frac{1}{\|\underline{x}\|^\alpha}$ dell'esempio precedente ma ora per $\underline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus B_1(\underline{0})$ ($n = 2, 3$), cioè all'esterno della palla di centro l'origine e raggio 1. La funzione f è ovviamente non negativa anche in $E = \mathbb{R}^n \setminus B_1(\underline{0})$ che è illimitato e misurabile (poiché $B_N(\underline{0}) \cap E = B_N(\underline{0}) \setminus B_1(\underline{0})$, differenza di insiemi limitati misurabili, è misurabile per ogni $N \in \mathbb{N}$), e f è continua e anche limitata in E (chiaramente $1/\|\underline{x}\|^\alpha \leq 1$ se $\|\underline{x}\| \geq 1$). Dunque $\mathfrak{M}_f$ è la famiglia dei sottoinsiemi limitati e misurabili di E , e posto

$$F_k := E \cap B_k(\underline{0}) = B_k(\underline{0}) \setminus B_1(\underline{0}) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid 1 \leq \|\underline{x}\| < k\},$$

la successione $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}_f$ soddisfa chiaramente le condizioni (i) e (ii) del teorema 6. Dunque se $n = 2$ si ha, usando coordinate polari analogamente all'esempio precedente,

$$\iint_{F_k} \frac{dxdy}{(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^k \frac{dr}{r^{\alpha-1}} = 2\pi \begin{cases} \log k & \text{se } \alpha = 2, \\ \frac{1}{2-\alpha} (k^{2-\alpha} - 1) & \text{se } \alpha \neq 2, \end{cases}$$

e quindi grazie alla (3)

$$\iint_{\mathbb{R}^2 \setminus B_1(\underline{0})} \frac{dxdy}{\|(x, y)\|^\alpha} = \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus B_1(\underline{0})} \frac{dxdy}{(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \iint_{F_k} \frac{dxdy}{(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \leq 2, \\ \frac{2\pi}{\alpha-2} & \text{se } \alpha > 2. \end{cases}$$

Analogamente, per $n = 3$, usando coordinate sferiche,

$$\iiint_{F_k} \frac{dxdydz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\alpha/2}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_1^k \frac{dr}{r^{2-\alpha}} = 4\pi \begin{cases} \log k & \text{se } \alpha = 3, \\ \frac{1}{3-\alpha} (k^{3-\alpha} - 1) & \text{se } \alpha \neq 3, \end{cases}$$

e quindi

$$\iiint_{B_1(\underline{0})} \frac{dxdydz}{\|(x, y, z)\|^\alpha} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \iiint_{F_k} \frac{dxdydz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\alpha/2}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \leq 3, \\ \frac{4\pi}{\alpha-3} & \text{se } \alpha > 3. \end{cases}$$

In particolare, quindi, la funzione $f(\underline{x}) = \frac{1}{\|\underline{x}\|^\alpha}$ è sommabile in $\mathbb{R}^n \setminus B_1(\underline{0})$ se e solo se $\alpha > n$, e anche in questo caso si vede facilmente che lo stesso vale per quanto riguarda la sommabilità della funzione $f(\underline{x}) = \frac{1}{\|\underline{x} - \underline{x}_0\|^\alpha}$ in $\mathbb{R}^n \setminus B_r(\underline{x}_0)$, esterno della palla di centro $\underline{x}_0$ e raggio $r > 0$.

I risultati degli esempi (b) e (c) precedenti generalizzano ovviamente i fatti ben noti nel caso di $n = 1$ variabile, e giocano lo stesso ruolo di questi ultimi: un modo spesso utile per verificare la sommabilità o meno di una funzione di più variabili e quello di utilizzare il criterio del confronto, usando come funzione di confronto una di quelle sopra studiate.