

ANALISI MATEMATICA 2 - INGEGNERIA MECCANICA ED ENERGETICA

A.A. 2020-21

PROVA SCRITTA DEL 15/6/2021

Scrivere nome, cognome e numero di matricola in *stampatello* su *tutti* i fogli da consegnare. Consegnare *solo* la bella copia. Solo gli svolgimenti *motivati e scritti chiaramente* saranno presi in considerazione.

1. Data la funzione

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 4)^2 + 1,$$

determinarne:

- (a) gli eventuali punti stazionari, e la loro natura;
- (b) il massimo e il minimo assoluto su $\mathbb{R}^2$, se esistono;
- (c) il massimo e il minimo assoluto nell'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 4\}$, se esistono.

Soluzione. (a) La funzione data è un polinomio, quindi è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, e i suoi punti stazionari si ottengono allora annullandone il gradiente:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 4x(x^2 + y^2 - 4) = 0, \\ f_y(x, y) = 4y(x^2 + y^2 - 4) = 0. \end{cases}$$

La prima equazione è verificata per $x = 0$ o $x^2 + y^2 = 4$. Sostituendo $x = 0$ nella seconda equazione si ottiene $4y(y^2 - 4) = 0$, che ha le soluzioni $y = 0, \pm 2$. Sostituendo invece $x^2 + y^2 = 4$ nella seconda equazione si ottiene l'identità $0 = 0$. Dunque, osservando che i punti $(0, \pm 2)$ soddisfano l'equazione $x^2 + y^2 = 4$, si conclude che i punti stazionari di f sono $(0, 0)$ e tutti i punti (x, y) sulla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 4$. Per studiarne la natura calcoliamo l'hessiano di f :

$$D^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 12x^2 + 4y^2 - 16 & 8xy \\ 8xy & 4x^2 + 12y^2 - 16 \end{bmatrix}.$$

Si ha allora

$$D^2 f(0, 0) = \begin{bmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -16 \end{bmatrix}$$

che è definita negativa (ha un autovalore $\lambda = -16$ di molteplicità geometrica 2), e dunque $(0, 0)$ è un punto di massimo relativo. Se invece (x, y) è tale che $x^2 + y^2 - 4$ si ha

$$D^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 8x^2 & 8xy \\ 8xy & 8y^2 \end{bmatrix}$$

da cui

$$\det D^2 f(x, y) = 64x^2y^2 - 64x^2y^2 = 0, \quad \text{tr } D^2 f(x, y) = 8(x^2 + y^2) = 32$$

e dunque $D^2 f(x, y)$ è semidefinita positiva e non dà informazioni sulla natura del punto stazionario. Osservando però che nei punti (x, y) tali che $x^2 + y^2 = 4$ si ha $f(x, y) = 1$, mentre chiaramente $f(x, y) \geq 1$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si conclude che tali punti sono minimi assoluti, e quindi relativi, di f .

(b) Come appena osservato, $\min_{\mathbb{R}^2} f = 1$, realizzato in tutti i punti della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 4$. Avendosi inoltre, in coordinate polari,

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = (r^2 - 4)^2 + 1 \rightarrow +\infty \quad \text{per } r \rightarrow +\infty,$$

e poiché questo limite è chiaramente uniforme in θ (l'espressione di f in coordinate polari non dipende infatti da θ), si conclude che $\lim_{(x, y) \rightarrow \infty} f(x, y) = +\infty$, e che quindi f non ammette massimo assoluto su $\mathbb{R}^2$.

(c) L'insieme D è la parte di piano delimitata dall'ellisse di centro l'origine e semiassi 2 e 1 lungo x e y rispettivamente (ellisse compresa), ed è quindi compatto. Pertanto per il teorema di Weierstrass esistono $\min_D f$ e $\max_D f$. Poiché inoltre l'ellisse ∂D , di equazione $x^2 + 4y^2 = 4$, e la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 4$, su cui f raggiunge il suo minimo assoluto, hanno in comune i punti $(\pm 2, 0)$, si conclude subito che $\min_D f = 1$. Il punto di massimo assoluto di f su D potrà trovarsi all'interno di D , nel qual caso dovrà essere il punto $(0, 0)$, unico punto

di massimo relativo di f , oppure su ∂D , e sarà dunque un punto di massimo di f vincolato a ∂D . Posto $g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4$ si ha chiaramente $\partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$, e poiché $\nabla g(x, y) = (2x, 8y) \neq (0, 0)$ per ogni $(x, y) \in \partial D$, tutti i punti di ∂D sono regolari. Ne segue che i punti estremali di f vincolati a ∂D si possono determinare tramite il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, cioè saranno soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) - \lambda g_x(x, y) = 2x(2x^2 + 2y^2 - 8 - \lambda) = 0, \\ f_y(x, y) - \lambda g_y(x, y) = 4y(x^2 + y^2 - 4 - 2\lambda) = 0, \\ g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0. \end{cases}$$

La prima equazione è verificata per $x = 0$ o $\lambda = 2x^2 + 2y^2 - 8$. Sostituendo $x = 0$ nella terza equazione si ottiene $y = \pm 1$. Sostituendo invece $\lambda = 2x^2 + 2y^2 - 8$ nella seconda equazione si ottiene $12y(4 - x^2 - y^2) = 0$, e sostituendo poi in questa l'equazione $x^2 = 4 - 4y^2$ (equivalente alla terza) ci si riduce a $36y^3 = 0$, cioè $y = 0$ e $x = \pm\sqrt{4 - 4y^2} = \pm 2$. Essendo allora $f(0, \pm 1) = 10$, $f(0, 0) = 17$ (e $f(\pm 2, 0) = 1$ come già osservato), si ottiene $\max_D f = 17$. Un metodo alternativo (e più rapido) per determinare il massimo assoluto è il seguente. Considerato il disco $E = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$, che è compatto, poiché $f(x, y) = 1$ sulla circonferenza $\partial E = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$ e $f(x, y) \geq 1$ su E , si ha che il massimo assoluto di f in E , che esiste per il teorema di Weierstrass, non può trovarsi su ∂E , e deve dunque coincidere con l'unico massimo relativo interno a E , cioè $(0, 0)$, e dunque $\max_E f = f(0, 0) = 17$. Dunque $f(x, y) \leq 17$ per ogni $(x, y) \in E$. Essendo allora $D \subset E$ questo varrà anche per D , ed essendo $(0, 0) \in D$ si conclude che $\max_D f = \max_E f = 17$.

2. Calcolare l'integrale

$$\iiint_E e^{z-1} dx dy dz$$

dove $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x, y, z \leq 1, z \leq x + y \leq 1\}$.

Soluzione. La disuguaglianza $x + y \leq 1$ equivale a $y \leq 1 - x$, ed essendo $0 \leq x \leq 1$ nell'insieme E , se $0 \leq y \leq 1 - x$ si ha anche $0 \leq y \leq 1$, e analogamente se $0 \leq z \leq x + y$ si ha anche $0 \leq z \leq 1$. Dunque l'insieme di integrazione si può scrivere come

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq x + y\},$$

che è chiaramente normale rispetto all'asse x , con sezioni parallele al piano yz che sono normali rispetto all'asse y . Dunque integrando per strati rispetto a tale asse

$$\begin{aligned} \iiint_E e^{z-1} dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} dz e^{z-1} = e^{-1} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (e^{x+y} - 1) \\ &= e^{-1} \int_0^1 dx (e - e^x - 1 + x) = e^{-1} \left(e - (e - 1) - 1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2e}. \end{aligned}$$

3. Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - y, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + x, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + z \right),$$

definito per $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, attraverso la superficie Σ ottenuta dalla rotazione completa attorno all'asse z della curva di equazione $x = 2 - z^2$, $z \in [-1, 1]$, contenuta nel piano xz , e orientata in modo che il versore normale nel punto $(2, 0, 0)$ sia $n^+ = (1, 0, 0)$. (Sugg.: $\int \frac{dz}{(1+z^2)^{3/2}} = \frac{z}{(1+z^2)^{1/2}}$.)

Soluzione. Poiché la definizione di flusso di F attraverso Σ conduce a un integrale il cui calcolo è complicato, conviene cercare di utilizzare il teorema della divergenza per ridursi al calcolo del flusso attraverso una superficie più semplice. A tale scopo si consideri la superficie cilindrica

$$\Sigma_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 = 1\},$$

che è generata dalla rotazione completa attorno all'asse z del segmento $\{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq z \leq 1, x = 1\}$ contenuto nel piano xz . Si ha allora $\Sigma \cup \Sigma_0 = \partial D$, dove

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq z \leq 1, 1 \leq x^2 + y^2 \leq (2 - z^2)^2\}$$

è l'insieme generato dalla rotazione attorno all'asse z dell'insieme $E = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq z \leq 1, 1 \leq x \leq 2 - z^2\}$ contenuto nel piano xz e delimitato dal segmento di sopra e dal segmento di parabola che genera Σ . Orientando allora Σ_0 con il campo di versori normali esterni a D ,

$n_0^+(x, y, z) = (-x, -y, 0)$, $(x, y, z) \in \Sigma_0$, e tenendo conto che l'orientazione di Σ data dal testo è anch'essa esterna a D , dal teorema della divergenza si ha che il flusso richiesto è

$$\iint_{\Sigma} \langle F, n^+ \rangle dS = \iiint_D \operatorname{div} F \, dx dy dz - \iint_{\Sigma_0} \langle F, n_0^+ \rangle dS.$$

Essendo poi

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = \frac{-2x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}},$$

ed analogamente per le derivate rispetto a y e z , si ottiene

$$\operatorname{div} F = \frac{-2x^2 + y^2 + z^2 + x^2 - 2y^2 + z^2 + x^2 + y^2 - 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + 1 = 1.$$

Dunque

$$\begin{aligned} \iiint_D \operatorname{div} F \, dx dy dz &= |D| = \pi \int_{-1}^1 dz ((2 - z^2)^2 - 1) = \pi \int_{-1}^1 dz (z^4 - 4z^2 + 3) \\ &= \pi \left(\frac{2}{5} - \frac{8}{3} + 6 \right) = \frac{56}{15} \pi, \end{aligned}$$

dove per la seconda uguaglianza si è usata una delle formule viste a lezione per il volume di un solido di rotazione. Inoltre scegliendo la parametrizzazione $\sigma(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z)$, $(\theta, z) \in [0, 2\pi] \times [-1, 1]$, di Σ_0 , si ha

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_0} \langle F, n_0^+ \rangle dS &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^1 dz \left[\left(\frac{\cos \theta}{(1 + z^2)^{3/2}} - \sin \theta \right) (-\cos \theta) + \left(\frac{\sin \theta}{(1 + z^2)^{3/2}} + \cos \theta \right) (-\sin \theta) \right] \\ &= -\pi \int_{-1}^1 \frac{dz}{(1 + z^2)^{3/2}} = -\pi \left[\frac{z}{(1 + z^2)^{1/2}} \right]_{-1}^1 = -\pi\sqrt{2}, \end{aligned}$$

e in conclusione il flusso richiesto è

$$\iint_{\Sigma} \langle F, n^+ \rangle dS = \left(\frac{56}{15} + \sqrt{2} \right) \pi.$$

Notare che non sarebbe stato invece possibile aggiungere a Σ i due dischi $\Sigma_{\pm 1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = \pm 1\}$, poiché pur avendosi in tal modo $\Sigma \cup \Sigma_{+1} \cup \Sigma_{-1} = \partial \tilde{D}$ con $\tilde{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq (2 - z^2)^2\}$, il teorema della divergenza non si può applicare a $\tilde{D}$ in quanto il campo F non è definito in $(0, 0, 0) \in \tilde{D}$.

4. Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1 + (3x)^n}$$

al variare di $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$.

Soluzione. Sia $|3x| > 1$, cioè $x \in (-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$. Si ha allora, per $n \rightarrow +\infty$,

$$\left| \frac{1}{1 + (3x)^n} \right| = \frac{1}{|3x|^n} \left| \frac{1}{1 + \frac{1}{3x^n}} \right| \sim \frac{1}{|3x|^n}$$

in quanto $\frac{1}{3x^n} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$. Poiché allora la serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{|3x|^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{|3x|} \right)^n$ è convergente (in quanto $\frac{1}{|3x|} < 1$), se ne deduce, in base al criterio del confronto asintotico, che la serie data è assolutamente (e quindi semplicemente) convergente per $|3x| > 1$. Se invece $|3x| < 1$, cioè $x \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, si ha $(3x)^n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$, e dunque

$$\frac{1}{1 + (3x)^n} \rightarrow 1 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty,$$

che implica che la serie data non è semplicemente (e quindi nemmeno assolutamente) convergente, avendo termine generico non infinitesimo. Infine se $3x = 1$, cioè $x = \frac{1}{3}$, il termine generico è costantemente uguale a $\frac{1}{2}$, e dunque ancora la serie non converge semplicemente né assolutamente.